La Maga y la Inquietud

Reflexiones sobre el trabajo de Ada Lovelace

Colectivo Disonancia

"La Maga y la Inquietud" es una compilación de dos ensayos originales del colectivo y la "Nota G", elaborada por Ada Lovelace.

Edición y diagramación por Colectivo Disonancia,
2021

colectivodisonancia.net
@cdisonancia

La copia comparte cultura.

Puedes descargar el Fanzine aquí:

https://colectivodisonancia.net/zines
https://cloud.disroot.org/s/ezoecDQFdBdwCzy
https://gitlab.com/cdisonancia/zines

Esta obra está bajo
Licencia de Producción de Pares

La Maga y la Inquietud

Reflexiones sobre el trabajo de Ada Lovelace

Colectivo Disonancia

Notas de la edición

La Maga y la Inquietud recoge tres textos, dos elaborados por nuestro colectivo con reflexiones sobre la obra de Ada Lovelace. El primero, *La Máquina en el Umbral*, vincula el destacado aporte de Ada con su contexto histórico y la situación patriarcal. El segundo, *El Código y el Amanecer*, realiza un análisis técnico y de divulgación sobre la *Nota G*, el texto que escribió Lovelace para la Máquina Analítica y que es el primer programa informático de la historia. Además, esta edición presenta una traducción de la nota, publicada originalmente en 1843, incluyendo sus ecuaciones y diagramas.

Por medio de una reflexión política, esperamos que estos textos logren difundir el trabajo de Ada desde una perspectiva subversiva y creativa de éste, y que, a su vez, permita acercarnos a la ciencia y la tecnología más allá de los límites que ha impuesto la hegemonía patriarcal y capitalista.

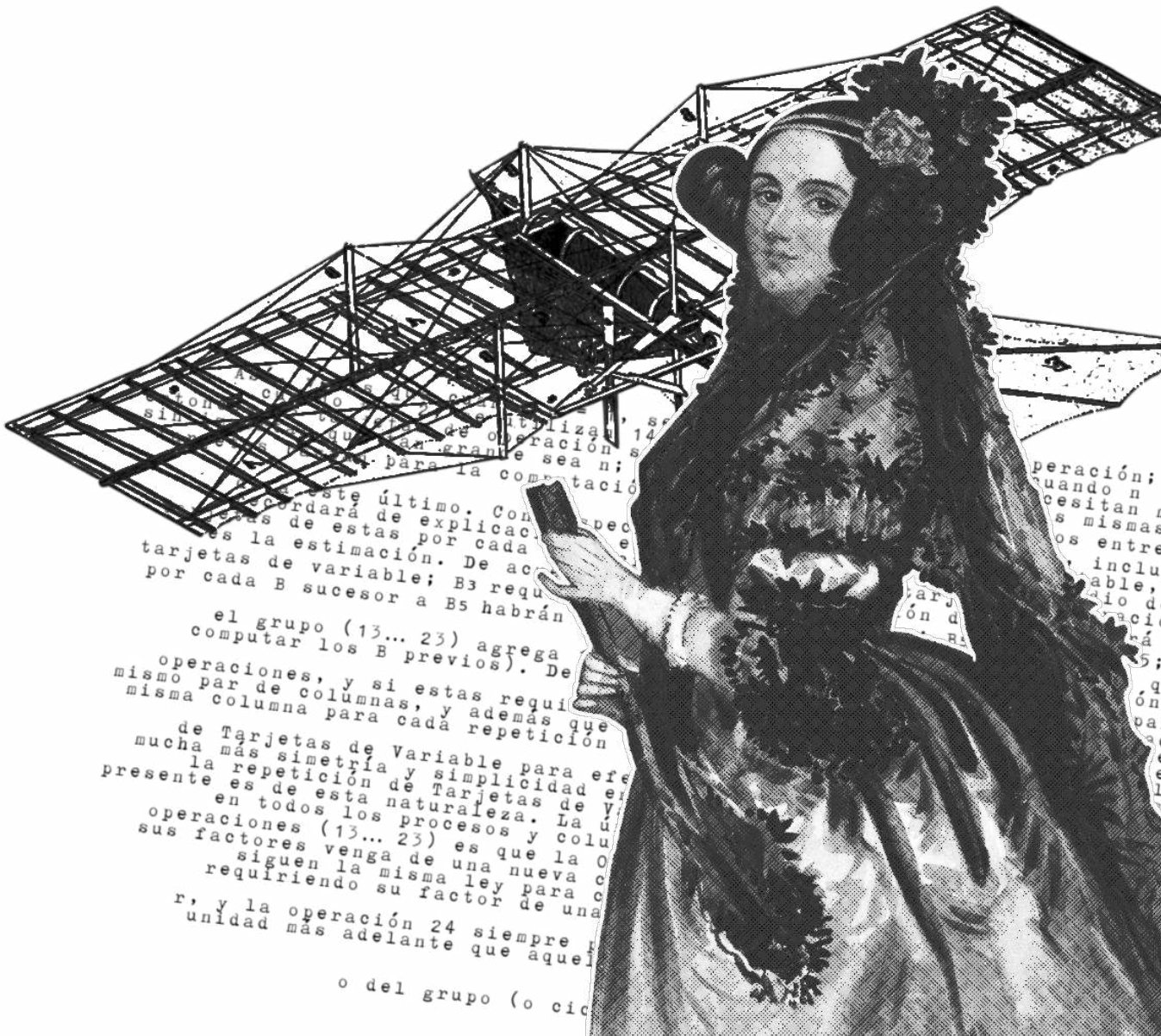
Colectivo Disonancia,
Marzo, 2021

Ningún acto es verdaderamente humano
hasta que ocurre dentro del paisaje
del pasado y el futuro.

Ursula K. Le Guin.
Los Desposeídos

La Máquina en el Umbral

Consideraciones políticas y creativas sobre Ada



Cuando se piensa en los procesos históricos que marcan el desarrollo tecnológico, se suele considerar una historia de grandes descubrimientos y avances progresivos, a su vez, pareciera ser común que algunas reflexiones no toman en cuenta la influencia de los contextos políticos, las contradicciones de cada época y la exclusión de aquellos que, estando en una posición social subordinada, formaron parte de esta historia. La revolución industrial, con el despegue de la maquinaria y el refinamiento de la explotación capitalista, también participa de un relato atestado de omisiones y elementos conflictivos.

Una de las figuras que ha sido rescatada de este período es Ada Lovelace, de quien hoy existe el consenso en ser reconocida como la primera programadora de la historia, en particular por la elaboración del primer algoritmo en su famosa *Nota G*, publicada en 1843. En ella demuestra cómo podría "programarse" un cálculo determinado en el motor analítico, artefacto que funcionaría de manera mecánica y usando números decimales en vez de binarios. Vislumbró y diseñó lo que hoy podemos reconocer como informática, la capacidad de programar y realizar cualquier cálculo de manera universal, pero mucho antes de que existieran computadores. Este mérito, por bastante tiempo no reconocido, da cuenta de un hecho lamentable, y es que históricamente las restricciones que impone la racionalidad capitalista y patriarcal son una limitación para la creatividad humana, incluso para el desarrollo tecnológico. Ada es la confirmación histórica de lo que ha estado errado

por siglos: las imposiciones de género en cualquier labor no tiene ningún fundamento real, excepto el perpetuar la dominación patriarcal.

En la actualidad, pareciera que el campo del desarrollo tecnológico está progresivamente aceptando la diversidad laboral en términos étnicos y de género, mostrando, al parecer, la configuración de un capitalismo inclusivo. El caso ejemplar es el de Alphabet, más conocida por su filial Google, que es la principal empresa de desarrollo de software del mundo y cuenta con un ostentoso "Reporte de diversidad"[1] para señalar sus logros en materia de inclusión. Sin embargo, eso no evita que Google haya desarrollado herramientas para vigilar las conversaciones e intentos de organización de sus propios trabajadores[2], o incluso que haya despedido a una integrante del equipo de Ética de Inteligencia Artificial luego de que ella publicara una crítica sobre los problemas de sesgo en algunos algoritmos de la empresa[3]. Para la compañía de Silicon Valley, el discurso de la inclusión es una forma de administrar su imagen presentando una apariencia de justicia y responsabilidad social que difumina sus prácticas reales. La inclusión queda delimitada al servicio de una política de la imagen que encubre, como toda empresa, que al final del día lo que le importa es la explotación y la ganancia.

En este escenario, visitar figuras como la de Ada para poder pensar formas y estrategias tecnológicas que permitan construir un futuro más allá del capitalismo, el patriarcado y la tecnocracia requiere considerar su trabajo en su propio mérito y no quedarnos sólo en el testimonio de su imagen. Por ello, es relevante cuestionar el conveniente y vacío discurso corporativo de la superación personal y el emprendimiento. Necesitamos evaluar, en su caso, qué elementos hicieron posible este surgimiento inesperado de la informática en un contexto inusual para su invención, en donde la elaboración de su propuesta subvierte los límites convencionales de la tecnología y de la función patriarcal de la mujer. Si visitamos a

---

[1] https://diversity.google/

[2] https://www.bloomberg.com/news/articles/2019-10-23/google-accused-of-creating-spy-tool-to-squelch-worker-dissent

[3] Timnit Gebru, que integraba el área de ética de inteligencia artificial fue despedida por su publicación que criticaba los algunos algoritmos de Google: https://www.eldiario.es/tecnologia/google-despide-investigadoras-etica-inteligencia-artificial_1_6480986.html, https://www.theguardian.com/technology/2020/dec/16/google-timnit-gebru-fired-letter-reinstated-diversitynt

Ada para hacer una política sólo desde la imagen y la representación, fácilmente nuestras ideas pueden ser cooptadas por el imaginario corporativo de una inclusión represiva de la que Google es ejemplo, pero que de ninguna forma es un caso único. Bajo esta perspectiva, el trabajo de la autora de la *Nota G* tiene mucho que sugerir.

****

Maquinaria, brujería y notas al margen

Las últimas décadas del siglo XVIII marcaron un cambio radical en la historia con la revolución industrial. Debido a la transformación en la organización del trabajo y al desarrollo permanente de las técnicas destinadas a la producción, el capitalismo creó condiciones de productividad nunca vistas anteriormente. Este primer momento de despegue de la economía industrial culmina en 1840 con la consolidación de la industria pesada en Inglaterra[4], en donde el interés por la capacidad de la maquinaria estaba cada vez más presente en los objetivos económicos y políticos. Inglaterra era el centro tecnológico mundial, con todo lo que esto significaba: un motor creativo marchando a una velocidad impensada, a la vez que convivía con la miseria de una masa obrera empobrecida.

Ada creció consciente de este desarrollo técnico y de su potencial, en particular debido a la inusual educación que recibió para ser mujer en el siglo XIX. A pesar de no haber conocido a su padre, el poeta Lord Byron, su madre, Annabella Milbanke, se preocupó de que se formara en matemáticas para alejar la posibilidad de desarrollar un carácter "impulsivo" como su padre[5]. A los once años ya estaba interesada en construir una máquina para volar, llegando a escribir en ese período un libro ilustrado con sus ideas. A los 17 años, con una formación avanzada y manteniendo sus intereses, conoce a Charles Babbage, un matemático que había creado el motor diferencial, una máquina que permitía calcular funciones polinómicas. Desde entonces, Ada mantendría con Babbage una correspondencia y colaboración intelectual fructífera. Posteriormente, al casarse con

[4] Eric Hobsbawm. "La Revolución Industrial" en La Era de la Revolución 1789-1848 (1962).

[5] Una detallada descripción de la vida de Ada y una adecuada evaluación de su obra pueden encontrarse en el artículo "Untangling the Tale of Ada Lovelace" de Stephen Wolfram https://writings.stephenwolfram.com/2015/12/untangling-the-tale-of-ada-lovelace/

William King, quien es nombrado conde, hace que Ada Byron reciba el título de condesa de Lovelace, nombre por el que se la conoce históricamente.

A la vez que cumplía el rol de madre según las imposiciones de la época, Ada mantuvo el diálogo intelectual con Babbage y tuvo un particular interés en el diseño del motor analítico, máquina ideada por éste último para aumentar la efectividad en la elaboración de tablas matemáticas, utilizadas con mucha frecuencia en la industria y en el campo militar. Esta máquina, que nunca llegó a construirse, llamó la atención de Luigi Menabrea, quien en 1842 escribió un artículo en francés sobre el motor analítico, cosa que nunca hizo el propio Babbage. Ada decidió traducir el ensayo de Menabrea y además agregar una serie de notas, clasificadas de la A a la G, para explicar en un sentido más completo y detallado el funcionamiento del artefacto. Luego de la publicación de la traducción en 1843, firmada como A.A.L, por Ada Augusta Lovelace, le propone a Babbage colaborar activamente en la implementación del proyecto de la máquina analítica, lo que él acepta. Finalmente, en 1852, la salud de Ada decae y fallece en agosto, a los 36 años, dejando en las notas de su traducción un impulso creativo que tensiona la manera en que el avance técnico se estaba desarrollando hasta ese momento.

A pesar de que la traducción del texto de Menabrea fue publicada bajo su autoría, Ada decidió firmar sólo con sus iniciales para no ser identificada necesariamente, pero también para permitir la posibilidad de ser reconocida en el futuro[5]. No era ni usual ni convencionalmente aceptado que una mujer participara de manera pública en la discusión intelectual, ni mucho menos, aportar en el desarrollo técnico. Se la situaba en un espacio muchas veces de opresión, lleno de prejuicios y malas voluntades. Es un hecho que su clase social no la limitaba al punto de una mujer inglesa de su misma edad pero obrera, menos aún se acercaba a la situación de opresión y marginalidad de las mujeres que no eran blancas ni europeas. No obstante, si bien Ada era de una clase privilegiada, sí debió cumplir con el rol de madre y esposa que su entorno esperaba de ella. Debido a esto, el ser mujer le significó el menosprecio al participar en ambientes científicos y tener menos facilidades para su labor intelectual, como fue, por ejemplo, no poder ingresar en la biblioteca de la “Royal Society”, a pesar de que su esposo era miembro de esa sociedad[5]. Las mujeres en la Europa moderna tenían un incuestionado rol doméstico, como esposa y como madre. Esta concepción reaccionaria del género no es en particular una herencia necesariamente religiosa, sino que forma parte de las decisiones políticas que también dieron a luz a la

industrialización.

En el siglo XVI, Europa atravesaba una crisis demográfica que presentó un impedimento para el desarrollo capitalista. El interés de los emergentes estados modernos, y de las instituciones a su alrededor, en aumentar la natalidad implicó impulsar un acelerado incremento demográfico que requirió promover una división sexual del trabajo en la cual las mujeres debían cumplir un rol matrimonial y de reproducción exclusivo. Uno de los efectos violentos más recordados de este disciplinamiento, y sólo por mencionar uno, fue la proliferación de la "caza de brujas", en donde bajo la figura de la "bruja" se agrupó a las mujeres que poseían saberes que permitían el control sobre su sexualidad y reproducción. El objetivo de esta persecución pública era condenar y atacar las labores que no estuvieran vinculadas al trabajo reproductivo[6]. En este agresivo intento por aumentar el nacimiento de nueva mano de obra, se forzó a las mujeres a ocupar una posición subordinada o marginal dentro de las labores sociales y se crearon las condiciones demográficas que hicieron posible la explotación laboral que impulsó la revolución industrial.

Curiosamente, a pesar del peso de esta herencia material e histórica, "Lady-Fairy", como se hacía llamar Ada en alguna de sus cartas, supo encontrar en la máquina analítica de Babbage, y por ello en el potencial oculto de la tecnología industrial inglesa consolidada, los elementos para pensar un mundo que aún no existía. Es cierto que la industrialización fomentó la innovación y el "descubrimiento" tecnológico, pero en la mayoría de los casos su formulación teórica se realizó posterior a su construcción y sólo de manera descriptiva, como la máquina a vapor, o esas innovaciones fueron pensadas como un intento de mejorar lo que ya existía, como era el objetivo del propio Babbage con su máquina. En ese sentido, la mayoría de la innovación tecnológica del primer impulso industrial fue consistentemente positivista, puesto que consideraba a la maquinaria como una manera de abordar una realidad ya delimitada y conocida. En cambio, las reflexiones y propuestas de la *Nota G* abren el campo de lo posible para considerar formas de calcular, pensar y trabajar que no tienen precedentes.

Las notas de traducción de Ada tienen un tamaño mayor que el propio tratado que

[6] Un análisis detallado y documentado sobre este control reproductivo y la "acumulación originaria" generada se encuentra en la sección "Descenso de la población, crisis económica y disciplinamiento de las mujeres" de Calibán y la Bruja, de Silvia Federici.

tradujo. En ellas, describe la máquina analítica de una manera más abstracta, y por ello, señalando los potenciales que el propio Babbage, su creador, no llegó a formular. La célebre *Nota G* parte con una consideración sobre que el artefacto no tiene pretensión de crear algo original pero que, por el contrario, sí es capaz de hacer cualquier cosa que sepamos ordenarle. Para demostrar esto, describe cómo la máquina puede calcular un número de Bernoulli[7], lo que permitiría ejemplificar la capacidad de realizar un cálculo complejo. En la descripción de su ejemplo, Ada hace referencia a los pasos a seguir, a una tarea que se repite en "un ciclo" y a la posibilidad de optimizar las "tarjetas" que introducían los valores a la máquina, tal como hoy se optimiza el uso de variables en programación. Así, utiliza conceptos como ciclos, variables (las tarjetas), capacidad de cálculo y obtención de datos de un procedimiento; dentro del marco de un sistema que puede configurarse para realizar cualquier tarea general de acuerdo a lo que el operador defina. Es, en suma, la descripción de un algoritmo de programación, o en otras palabras, un programa que realiza una tarea ordenada de acuerdo a cómo sea configurada. Sin haber antecedentes, Ada formula y demuestra materialmente que existe una nueva forma en que se puede ejecutar y realizar el conocimiento humano, siendo su potencial enorme; este potencial de cálculo es lo que hoy llamamos informática. Podría argumentarse que Ada no comprendía realmente el impacto de sus ideas, pero en realidad era perfectamente consciente de lo que estaba desarrollando. En las mismas notas imagina otras formas prácticas de uso además de calcular, como la posibilidad de reproducir música: "Supongamos, por ejemplo, que las relaciones fundamentales entre los sonidos, en el arte de la armonía, fueran susceptibles de tales expresiones y adaptaciones: la máquina podría componer piezas musicales todo lo largas y complejas que se quisiera"[8]. Incluso reflexiona, como ya se mencionó, sobre la capacidad creativa de esta nueva tecnología, es decir si esta capacidad de cálculo puede producir algo nuevo u original. Ada señala que la máquina analítica no puede hacer nada original, sino sólo realizar las tareas para las que ha sido programada. Esta polémica sigue aún vigente en el desarrollo de la inteligencia artificial, sin que se haya podido refutar su objeción[9].

****

[7] Los números de Bernoulli, descubiertos por Jakob Bernoulli, son una serie de números constantes relacionados a una fórmula uniforme para la suma de potencias. Su descubrimiento fue publicado postumamente en 1713.

[8] La idea es explícitamente formulada por Ada en la Nota A: https://www.fourmilab.ch/babbage/sketch.html

[9] Alan Turing, quien formuló las bases de la computación en el siglo XX, reconoció a Ada la idea de límite creativo

Dentro del paisaje del pasado y el futuro

En algunos momentos de la historia, otras personas imaginaron máquinas con propiedades singulares. Un caso memorable es el del filósofo Ramón Llull que en el siglo XIV pensó en la posible construcción de una "Máquina lógica" que, combinando varias premisas y axiomas, pudiera "calcular" las verdades en distintos campos del saber[10]. No obstante, la *Nota G* no es sólo una idea contemplada o un juego de la imaginación, es la demostración material de una nueva forma de conocimiento y experiencia humana, sin haber antecedentes previos de una propuesta similar. Dado lo singular de la *Nota G*, lo que sabemos de Ada y su contexto histórico, es posible afirmar que esta concepción lúcida y creativa que contiene la nota se debe al cruce de su posición de sujeto marginal, en el sentido de su rol de mujer en la modernidad, con su aporte al desarrollo tecnológico inglés del siglo XIX.

Siendo mujer, con una formación avanzada en matemática, situada en la culminación de la industria pesada en Inglaterra, pero además con la inusual oportunidad de entablar diálogo con sus pares matemáticos; Ada logró entrever elementos potenciales de la máquina analítica que nadie había sospechado. Este acercamiento desde el margen social hacia el centro de la innovación intelectual es también una inusitada oportunidad. El margen permite una cierta distancia para pensar ideas que no son siquiera imaginables en el centro intelectual. O en otras palabras, la creatividad que surge desde el margen no tiene los mismos límites que se establecen en las ideas convencionales. Ada expresa el contrapunto creativo y marginal respecto del desarrollo estandarizado y monótono del capitalismo industrial y que abre la posibilidad de construir, materialmente, una forma de subversión; una inquieta apertura de posibilidades a la sombra de la devastación industrial.

Hoy, nuestro escenario es considerablemente distinto a 1843. El desarrollo industrial

---

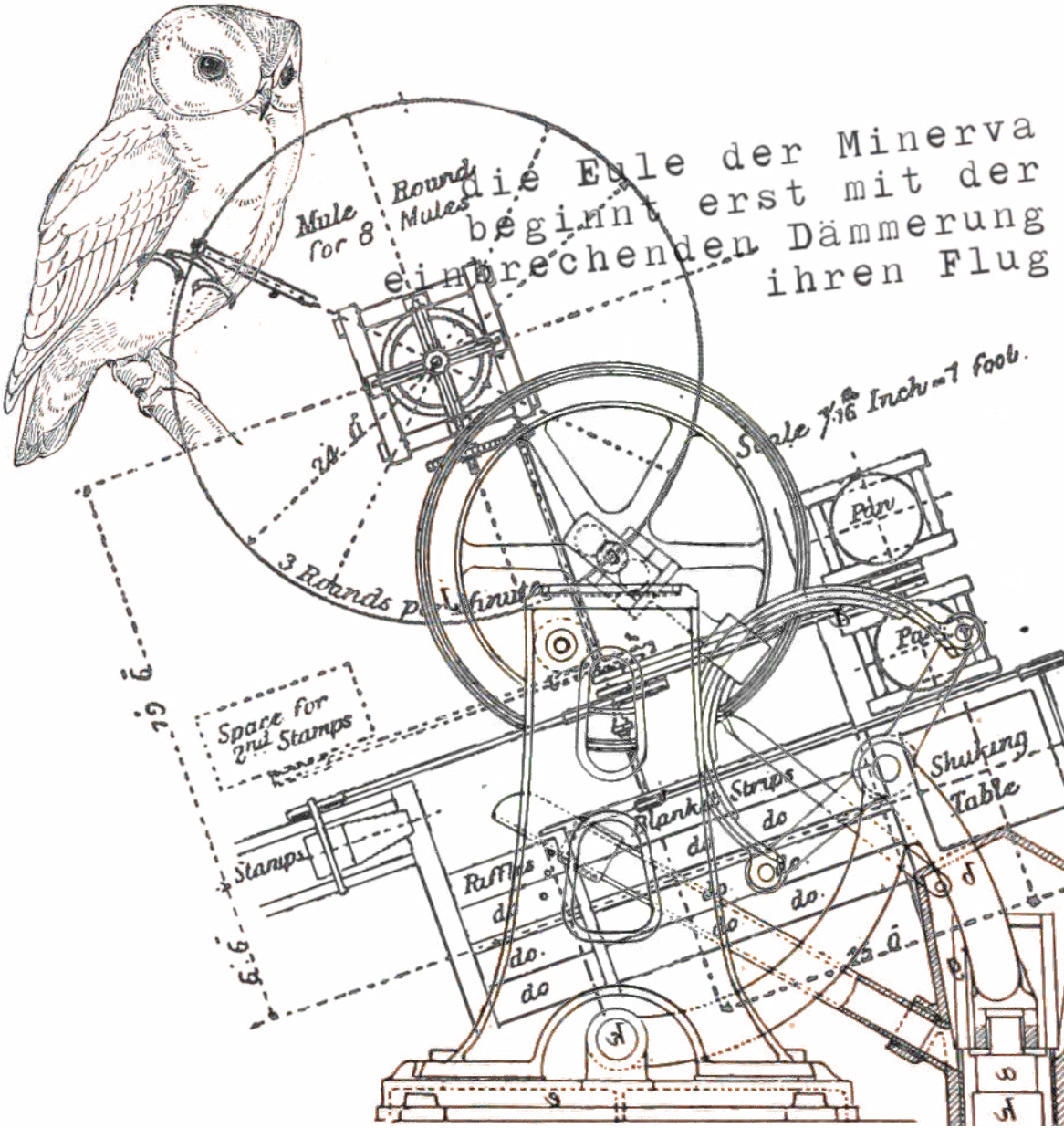
de la computación, llamando a este límite "la objeción de Lady Lovelace". Hasta la fecha, no se ha podido refutar la objeción de Ada. Ragnar Fjelland ha especificado los términos del problema en su artículo "Why general artificial intelligence will not be realized" https://www.nature.com/articles/s41599-020-0494-4

[10] Ramon Llull lo plantea en Arsgeneralis ultima (1308) https://www.jotdown.es/2016/10/ramon-llull-la-maquina-pensar/

clásico ha conducido a una gran transformación tecnológica que cambió la forma en cómo se organiza y domina el capital. La eficiencia tecnológica permite una enorme productividad en un mercado que funciona en red, en donde parte considerable de la población tiene acceso a la tecnología. Sin embargo, no podemos controlar, a nivel global, qué tecnologías se producen ni qué producir con ellas. Esas decisiones están entregadas al mercado y a las tecnocracias corporativas. La diversidad puede ser administrada por medio de discursos de inclusión y acceso efectivo a la tecnología, pero bajo el mandato de que esa inclusión no contradiga el flujo de capitales y los intereses institucionales. Pero la realidad no es sólo la constatación del presente, sino también la permanente inquietud de su transformación. El trabajo de Ada nos recuerda que toda tecnología nace con la promesa de futuros posibles, y que la creatividad radical y subversiva permite materializar los caminos a esos futuros.

El Código y el Amanecer

Análisis técnico sobre la Nota G



die Eule der Minerva
beginnt erst mit der
einbrechenden Dämmerung
ihren Flug

En el contexto de su publicación, la *Nota G* es la última de las notas explicativas que acompañó la traducción y comentario que realizó Ada Lovelace, en 1843, del artículo de Luigi Menabrea sobre la Máquina Analítica de Charles Babbage. Desde un principio, la nota no se elaboró como una propuesta propia, independiente al original. Sin embargo, por los elementos que describe y por ser el primer texto en comentar el potencial de cálculo de la máquina, es sin lugar a dudas la primera formulación de un algoritmo de programación.

Luego de su publicación, la *Nota G* recibió un reconocimiento paulatino, pero no fue sino hasta un siglo más tarde que recibió el reconocimiento por su inédito aporte. De manera habitual, esta nota, como el trabajo de Ada en general, no suele discutirse en la riqueza conceptual, e incluso epistemológica, de lo que llegó a formular, sobre todo considerando su elaboración en un contexto en que las tecnologías más avanzadas del momento aún funcionaban a vapor. Analizar su trabajo dentro de sus propios términos permite entregar mayor luz sobre lo que Ada, y figuras similares en la historia, han realizado como contribución. El presente texto intenta explicar el funcionamiento matemático de la nota y cómo Ada llegó a formular el primer algoritmo de programación.

Reflexiones de la Nota G

Antes de iniciar con la propuesta del cálculo de uno de los números de Bernoulli, Ada incluye varias concepciones propias en torno a las posibilidades de la ciencia y las expectativas que se tienen sobre los avances técnicos. Resulta interesante cómo ella enmarca su reflexión sin quedarse en el puro despliegue operativo, sino que también considera relevante posicionar su visión epistemológica. De esta manera, parte con una breve advertencia al lector sobre la desmedida reacción de la sociedad frente a las innovaciones tecnológicas, tanto de sobrevaloración, en una primera instancia, como de subestimación, luego del impacto inicial. Por esto, Ada se propone describir el potencial real de la máquina para evitar, así, estos extremos.

Otra idea significativa presente en su reflexión es lo que señala como la incapacidad del Motor Analítico de crear algo nuevo u original, ya que sólo puede calcular aquello que se le ha indicado previamente. Aun así sostiene que es la retroalimentación constante entre el trabajo científico (o "la ciencia") y los avances tecnológicos la que produce un efecto creativo sobre la forma en cómo conocemos y ampliamos dicho saber. Cada nuevo avance, herramienta o tecnología desarrollada, permite mejorar, validar o desechar sus modelos. Este proceso creativo es un efecto colateral que permite la innovación.

Luego, la nota detalla matemáticamente el funcionamiento de la máquina y sus posibles usos. Y es precisamente aquí, en ese ejercicio de demostración, en que no sólo muestra la forma de operar del motor, sino también la formulación radical que hace Ada sobre sus posibilidades y las de la tecnología en general. Tomando en consideración lo anterior, intentaremos presentar una explicación técnica de la nota de forma que sea comprensible con la menor cantidad de conocimiento previo. Cabe mencionar que la complejidad del programa descrito es parte de lo que hace notable históricamente a la *Nota G*. Un trabajo de esta magnitud era inédito en su área en 1843, y aún hoy sigue siendo difícil de entender, por lo que se buscará ser lo más ilustrativo posible. Sin embargo, hay algunos conceptos que, en beneficio de la claridad, no se podrán explicar en detalle debido a que esta nota estaba dirigida a personas habituadas a reflexiones en torno al área de la matemática y que

[1] El texto original del trabajo de Ada, en inglés, puede encontrarse aquí: https://www.fourmilab.ch/babbage/sketch.html

además tuvieran las notas anteriores como referencia[1]. Muchas de las ecuaciones no tienen explicación o introducción previa, ya que eran de conocimiento general entre los académicos de la época. Todos las expresiones fundamentales, sin embargo, pueden ser aprendidas, al menos conceptualmente, en un breve período de tiempo con ayuda de materiales de texto o videos de apoyo accesibles en la red.

El trabajo matemático de la Nota G
La máquina Analítica y el Cálculo Diferencial

La Máquina Analítica es la primera “computadora polifacética” en la historia diseñada para resolver la ejecución de cualquier problema matemático, desde integrales hasta sistemas de ecuaciones. El antecedente más cercano es la “Máquina diferencial", también de Babbage”, que podía crear tablas de logaritmos y funciones trigonométricas, tablas que se utilizaban antes de que se inventaran las calculadoras y servían para poder obtener los resultados de este tipo de operaciones. Sin embargo, Babbage se dio cuenta de que su artefacto era insuficiente y comenzó a diseñar la máquina analítica, que le permitiría hacer operaciones más complejas como cambiar de tipografía y el espaciado entre líneas.

Esta máquina además cumple con el concepto de Completitud de Turing. Es decir, puede ejecutar cualquier resolución de cálculo matemático conocida, siempre y cuando esté dentro de su capacidad de procesamiento computacional[2]. Para lograr todo esto, la Máquina tenía los siguientes elementos:

- Una Unidad Lógica Aritmética (ALU). Este es un pequeño computador interno que se encarga de resolver las operaciones básicas (Suma, resta, multiplicación, división).
- Un lector de tarjetas perforadas. Este sistema era el utilizado antes de la electrónica. Cada tarjeta perforada significaba un número, una operación o una orden. Estas tarjetas se dividen en tarjetas de operación, la instrucción de qué cálculo hacer, y tarjetas de variables, qué valores guardar.
- Motor a vapor para administrar la potencia al computador, ya que no funcionaba de manera electrónica.

[2] https://web.archive.org/web/20100426034840/http://halfbakedmaker.org/2009/12/26/rod-logic-alu-2/

- Una memoria capaz de almacenar 1000 números de 50 dígitos cada uno.

En resumen, la máquina analítica constituye el paso de los computadores que sólo pueden sistematizar y tabular información a aquellos que no realizan una sola tarea exclusiva, sino que pueden adaptarse, mediante una instrucción, a una diversidad de requerimientos generales, como es generar música, textos o leer símbolos, etc. Ahora bien, a pesar de todas sus capacidades, como advierte Ada, no puede generar conocimiento nuevo —lo que Turing bautizaría como "La Objeción de Lady Lovelace"[3]—, sino exclusivamente seguir órdenes y ejecutar procesos existentes.

Para entender la extensión de la capacidad de la Máquina Analítica, Lovelace menciona, en primer lugar, los elementos principales con los que trabaja la máquina. En segundo lugar, explica los métodos por los que la máquina puede hacer cálculos integrales y diferenciales, y en tercer lugar —más relevante histórica y matemáticamente—, cómo la máquina puede calcular los Números de Bernoulli.

Elementos principales

Para explicar los elementos con los que trabaja la máquina, Ada señala las funciones que puede realizar el artefacto:

1. Realiza las cuatro operaciones de la aritmética simple con cualquier número.

2. Por medio de ciertos artificios y arreglos (que no podemos abordar con el restringido espacio que admite la presente publicación), no existe límite ni para la magnitud de los números usados ni para el número de cantidades (ya sean variables o constantes) que se pueden emplear.

3. Puede combinar estos números y cantidades, tanto algebraica como aritméticamente, en relaciones ilimitadas en cuanto a variedad, extensión o complejidad.

4. Usa los signos algebraicos de acuerdo a sus leyes apropiadas y desarrolla las consecuencias lógicas de estas leyes.

5. Puede sustituir cualquier fórmula por otra arbitrariamente; eliminando la primera de

[3] https://writings.stephenwolfram.com/2015/12/untangling-the-tale-of-ada-lovelace/

ellas de la columna en la que está representada y colocando la segunda en su lugar.

6. Puede entregar valores singulares. Menabrea alude a esta capacidad en sus memorias, donde menciona el paso de valores de cero a infinito. La posibilidad de hacer que cambie sus procesos arbitrariamente en cualquier momento, ante la eventualidad de cualquier contingencia especificada (la sustitución de $(\frac{1}{2}\cos\overline{n+1}\theta + \frac{1}{2}\cos\overline{n-1}\theta)$ por $(\cos n\theta \cdot \cos\theta)$, explicada en la *Nota E*, ilustra esto de cierta forma), asegura este punto de inmediato.

Integrales y derivadas

Dos de los elementos centrales del cálculo son las derivadas e integrales. La máquina analítica podía hacer estos cálculos por dos vías. La primera, era resolviendo directamente el límite de las ecuaciones[4]. La segunda, era utilizar las propiedades de resolución disponibles hoy en día, tomando los valores de una ecuación y cambiándolos de lugar según sea el caso. El ejemplo utilizado por Ada es el de la potencia, ya que es uno de los más sencillos:
La propiedad dice que si tenemos ax^n, la derivada es anx^{n-1}. Entonces la máquina almacena:
En la ranura 1, el valor de a.
En la ranura 2, el valor de x.
En la ranura 3, el valor de n.
El usuario entonces indica a la máquina que:

En la ranura 1, agregue la multiplicación de las ranuras 1 y 3. (a • n)
En la ranura 2, mantenga el valor antiguo. (x)
En la ranura 3, le reste 1 al valor antiguo. (n - 1)

Si ponemos los nuevos valores en la ecuación original, notamos que se obtiene el resultado que la propiedad nos dice que deberíamos tener: anx^{n-1}.

Usando este mismo procedimiento, la máquina puede minimizar la cantidad de operaciones necesarias para llegar a un resultado, ya que al realizar la misma operación

[4] De manera sucinta y descriptiva, una derivada es la tendencia o razón de cambio en un punto de una función, así como la velocidad de un vehículo en un momento determinado es qué tanto está cambiando su posición. 10km/h significa que el auto cambia 10 kilómetros su posición cada hora. La integral, un poco más abstracto, es el área

una cantidad cualquiera de veces, se puede identificar una nueva propiedad. Por ejemplo, si quisiéramos derivar la función 4 veces, le diríamos a la máquina que:

En la ranura 1, reemplace a • n • (n − 1) • (n − 2) • (n - 3)
En la ranura 2 mantenga el valor antiguo.
En la ranura 3, reste 4 al valor antiguo (n - 4)

Con esta propiedad, si se efectúan múltiples derivadas se reduce a un cuarto la cantidad de operaciones necesarias y por lo tanto se ahorra una gran cantidad de energía y tiempo de cómputo. Dado que la optimización de recursos computacionales es de vital importancia al momento de abordar problemas complejos, que Ada mencione esta ventaja en el texto da cuenta de la clara comprensión que tenía sobre la necesidad de optimización de cálculo y, particularmente, de cómo la programación es también un ejercicio que requiere realizar tareas de la manera más sencilla posible.

El primer programa y los números de Bernoulli

Sin duda, el aspecto más relevante de la nota de Ada es el programa que tuvo que escribir para una máquina que nunca llegó a ver la luz y que, además, no estaba pensada, originalmente, para funcionar específicamente con la forma de programar que propone la autora de la *Nota G*. Este desafío es mayúsculo en cualquier época, y más aún previo al invento de la electrónica, sin contar con ningún precedente similar. El ejemplo elegido por Ada para describir su cálculo es la obtención de la sucesión de números llamada Números de Bernoulli.

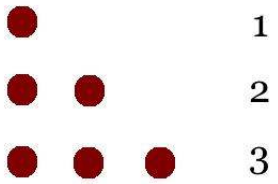
1- Sobre los Números de Bernoulli

Uno de los problemas más antiguos de la matemática son las sumatorias. ¿Cómo podemos saber cuánto vale la suma de todos los números de 1 a 1900, sin calcularlo manualmente? Si intentáramos sumar 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 1898 + 1899 + 1900 demoraríamos mucho. Por suerte, podemos expresar este problema de forma gráfica.

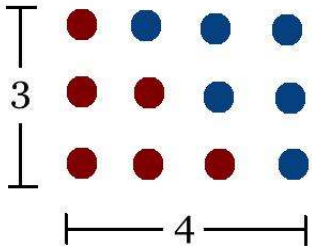
---

debajo de la curva de una función, cómo el área que ocupan las barras en un gráfico de barras. El límite, por su lado, es el cálculo aproximado a los que tienden los resultados en un punto determinado de una función. Así, se podría buscar la velocidad aproximada de un objeto en un momento específico aunque esta esté constantemente variando.

Podemos imaginar que tenemos un triángulo conformado por filas de piedras. La primera fila tiene una sola piedra, la segunda tiene 2, la tercera 3, etc.



Los matemáticos griegos se dieron cuenta de que para saber el número de piedras que contenía el triángulo, equivalente a la suma entre 1 y la cantidad de filas que tiene este, bastaba con hacer al lado otro triángulo idéntico de manera que formaran un rectángulo. Luego, para restar la cantidad de piedras que agregaba el segundo triángulo, simplemente se divide por 2 el área del rectángulo.



Este sistema funciona para cualquier cantidad de filas. Así, se puede expresar: 1 + 2 + 3 + ··· + n = n(n + 1)/2

Con esta formulación geométrica el problema fue solucionado. Sin embargo, posteriormente, la interrogante escaló al punto en que se comenzó a preguntar cuánto valía la suma de números elevados a cualquier potencia constante, o elevados a la k-ésima potencia ($1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$). Es aquí cuando en el siglo XVII el físico y matemático Jakob Bernoulli encontró una solución general usando métodos que el físico Blaise Pascal había desarrollado un par de décadas antes. Bernoulli escribió las soluciones para las sumatorias de las tres primeras potencias en términos de polinomios, o expresiones de operaciones matemáticas con más de un elemento:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2$$

Para sorpresa del matemático, se cumple la, hasta entonces, desconocida propiedad de que en cada caso la suma de los coeficientes (los números que acompañan desde la izquierda a cada "letra" o variable de la fórmula) resultan 1, es decir, tienen un factor común:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1.$$

Bernoulli notó que mediante esta propiedad o factor se podría calcular los coeficientes necesarios para realizar la suma de potencias. Es decir, se podría elaborar un sistema general para resolver este problema. Posteriormente, la existencia de la serie de números de Bernoulli fue demostrada y llamada así por Jakob Bernoulli. Estos números permitían, en la época de Ada, simplificar la suma de potencias y otros procedimientos. No obstante, realizar el cálculo de los números era un caso ejemplar de un procedimiento complejo y extenso.

2- Calculando Números de Bernoulli con la Máquina Analítica

Los números de Bernoulli son constantes que se repiten en distintos lugares de la física y la matemática, y son:

$B_0 = 1$
$B_1 = ½$
$B_2 = 1/6$
$B_3 = 0$
$B_4 = -1/30$
$B_5 = 0$
$B_6 = 1/42$
etc.[5]

Matemáticamente podemos generar estos números de varias formas. Existe más de una función generatriz, y además se pueden calcular recursivamente, o sea, calculando un número de Bernoulli con una ecuación que usa al número de Bernoulli anterior. La ecuación más simple es:

$$B_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{B_k}{n+1-k}$$

[5] Existen dos convenciones distintas que son matemáticamente equivalente entre sí, pero que utilizan dos números distintos para B_1 . Aquí hemos utilizado la más popular de las opciones.

En esta fórmula, B_n es el número de Bernoulli que se quiere obtener.

Matemáticamente, aunque no sea claro a simple vista, la resolución del problema es simple, ya que cualquiera con una calculadora convencional, o que pueda realizar operaciones básicas, podría obtener cualquier número de Bernoulli. Lo único que tendría que hacer es, desde la ecuación para B_n, resolver los coeficientes —los números que acompañan a las letras en la ecuación explicada anteriormente. No obstante, en 1840 no existía capacidad de cómputo que permitiese obtener de manera automática la serie de Bernoulli. Por ende, Ada eligió este problema precisamente para mostrar cómo la capacidad de cómputo de la Máquina Analítica resolvía el problema de la extensión del procedimiento de forma automática.

En el caso de la máquina, los datos almacenados en las tarjetas perforadas[6] se dividen entre Variables de Recepción y Variables de Resultados, y se presentan en columnas distintas, además de las tarjetas de operación que definen las operaciones a realizar. Esto permite a la máquina disponer de los elementos que tiene una ecuación —valores y operaciones— y aplicar cálculos sobre los valores para conseguir resultados. Ada mostró en sus notas un diagrama[7] con el detalle de este orden cuidadoso orden de variables y operaciones, y con ello, la complejidad del procedimiento.

En la mayor parte restante de la *Nota G* describe las operaciones que realizaría la máquina de acuerdo a los valores introducidos en las tarjetas a partir del diagrama que diseñó. En el procedimiento particular que describe, la obtención de uno de los números de Bernoulli, utiliza una función particular para calcular números pares de esta secuencia basándose en sus antecesores pares y, a su vez, los números impares según sus antecesores impares. Si bien Ada desarrolló un ejemplo de este cálculo para obtener B_7 en base a B_1 , B_3 y B_5, el procedimiento puede aplicarse a cualquier número de la sucesión.

Más allá de los detalles respecto a la posición y uso de las tarjetas que el lector puede encontrar en la nota misma y que es una explicación larga y compleja, Ada logró obtener

[6] Estas máquinas, antecesoras de los computadores, no eran como los computadores que conocemos hoy. Su tamaño era entre 100 y 10000 veces mayor y su capacidad de procesamiento era millones de veces menor. Probablemente la mayor diferencia es que en esa época no existían teclados ni mouses, por lo que los "inputs" (la nformación ingresada por el usuario para que la máquina procese) debían manejarse con grandes tarjetas que se insertaban en ranuras de la máquina y tenían un agujero en un lugar específico según el valor u operación que quisieran representar.

[7] El diagrama se encuentra al final de este documento y también disponible aquí: https://colectivodisonancia.net/diagrama-nota-g/

algunas generalizaciones y establecer cierta forma de ocupar el artefacto mediante las cuales pensar y emplear las tarjetas. La optimización de recursos, las cantidades de cálculo y la simplificación del procedimiento son los aspectos brillantes de la nota y algunos de sus principales contribuciones. Sin embargo, entre los elementos de la nota, el que cobra especial importancia es cuando Ada explica lo que se necesita para repetir el proceso de cálculo una cantidad indeterminada de veces, o *ad infinitum*. Para esto, señala:

- El número de datos necesarios para calcular el enésimo número (n) de Bernoulli siempre será (n+2).

- Para n = 1 se usan 9 tarjetas de operación. Para n = 2 se usan 14 tarjetas de operación. Para cualquier otro n mayor a 2, se utilizan 25 tarjetas de operación, sin importar lo grande que sea n.

- Se estima una media de 3 tarjetas de variable por cada operación. Desde B_6 en adelante, cada B posterior añadirá 33 tarjetas de variable adicionales, ya que cada B añade 11 operaciones al proceso.

Es contraintuitivo que el número de Tarjetas de Operación a utilizar sea un valor limitado si la cantidad de números que podemos requerir calcular, en teoría, son infinitos. Si cada B añade 11 operaciones extra al proceso, ¿cómo nos arreglamos con sólo 25 tarjetas de operación?[8] ¿Cómo la máquina analítica, con una limitada combinación de tarjetas podría calcular un procedimiento, en teoría infinito? Esto nos da pie para abordar la mayor contribución de este trabajo al área de la informática: es el uso de los ciclos. Una de las formas en que Ada logró reducir el uso de tarjetas fue mediante el uso de ciclos o rutinas de trabajo que repitieran operaciones y sobrescribieran valores en tarjetas ya utilizadas anteriormente para el mismo propósito, como el ejemplo que se mencionó al inicio de este texto sobre la reutilización de ranuras en el cálculo de derivadas. Este es el primer antecedente de los ciclos *for* y *while* tan omnipresentes y esenciales hoy para la computación moderna. No sólo eso, sino que en la *Nota G* también se mencionan ciclos de ciclos, que se detallan aún más en la *Nota E*.

[8] Debemos recordar que una misma tarjeta de operación se puede reutilizar en distintos momentos del proceso, y que por lo mismo una misma tarjeta de operación se puede utilizar para más de un proceso. Es necesario, sin embargo, dar un paso más allá si se quiere definir un límite absoluto de operaciones como hace Ada en la Nota.

De este modo, gracias a la propuesta de Ada sobre cómo usar el artefacto, repetir un mismo procedimiento sobre la base de los resultados de procedimientos anteriores permite a la máquina no tener límite para los cálculos posibles dentro de una misma tarea. Por ello, la descripción que hace Lovelace en su nota es la elaboración de un algoritmo, es decir, una forma ordenada de realizar una operación, que incluye procedimientos que se repiten y obtienen resultados a partir de los datos conseguidos previamente en cada ciclo. Es el primer programa informático conocido, que además fue diseñado para una máquina que aún no existía y sin contar con un precedente similar a esta idea.

Actualmente existe una versión del algoritmo de Lovelace escrito en C y una versión escrita en Python[9]. Una curiosidad interesante de mencionar es que en este mismo algoritmo, el primero de la historia, encontramos el primer error informático o "*bug*", ya que una de las fracciones escritas por Ada se encuentra invertida.[10]

Un fin precipitado para la máquina y la programación

A pesar de todo, la Máquina Analítica nunca se construyó. Al igual como ocurre con muchas ideas y soluciones hoy en día, no consiguió financiamiento por ser considerada muy ambiciosa. El diseño original pesaba 2,5 toneladas y era del tamaño aproximado de una casa. Con la Máquina Diferencial la historia fue similar pero aún más frustrante, ya que el gobierno le había concedido fondos a Babbage para construir el artefacto, pero luego se los quitó por problemas políticos con Joseph Clement, ingeniero en jefe del proyecto. Posteriormente, el hijo de Charles Babbage, Henry, construyó partes de la máquina y en 1991 el Museo de Ciencia de Londres elaboró una versión de la Máquina Diferencial.

El contexto en el que Ada publicó su traducción y sus notas tampoco fue favorable. La idea de programación que contiene la *Nota G* no fue considerada en todo su valor sino hasta el siglo siguiente y sólo cuando la computación ya había generado un interés y desarrollo independiente. Como toda idea prematura a su entorno, sólo tardíamente

[9] https://gist.github.com/sinclairtarget/ad18ac65d277e453da5f479d6ccfc20e y https://enigmaticcode.wordpress.com/tag/bernoulli-numbers/

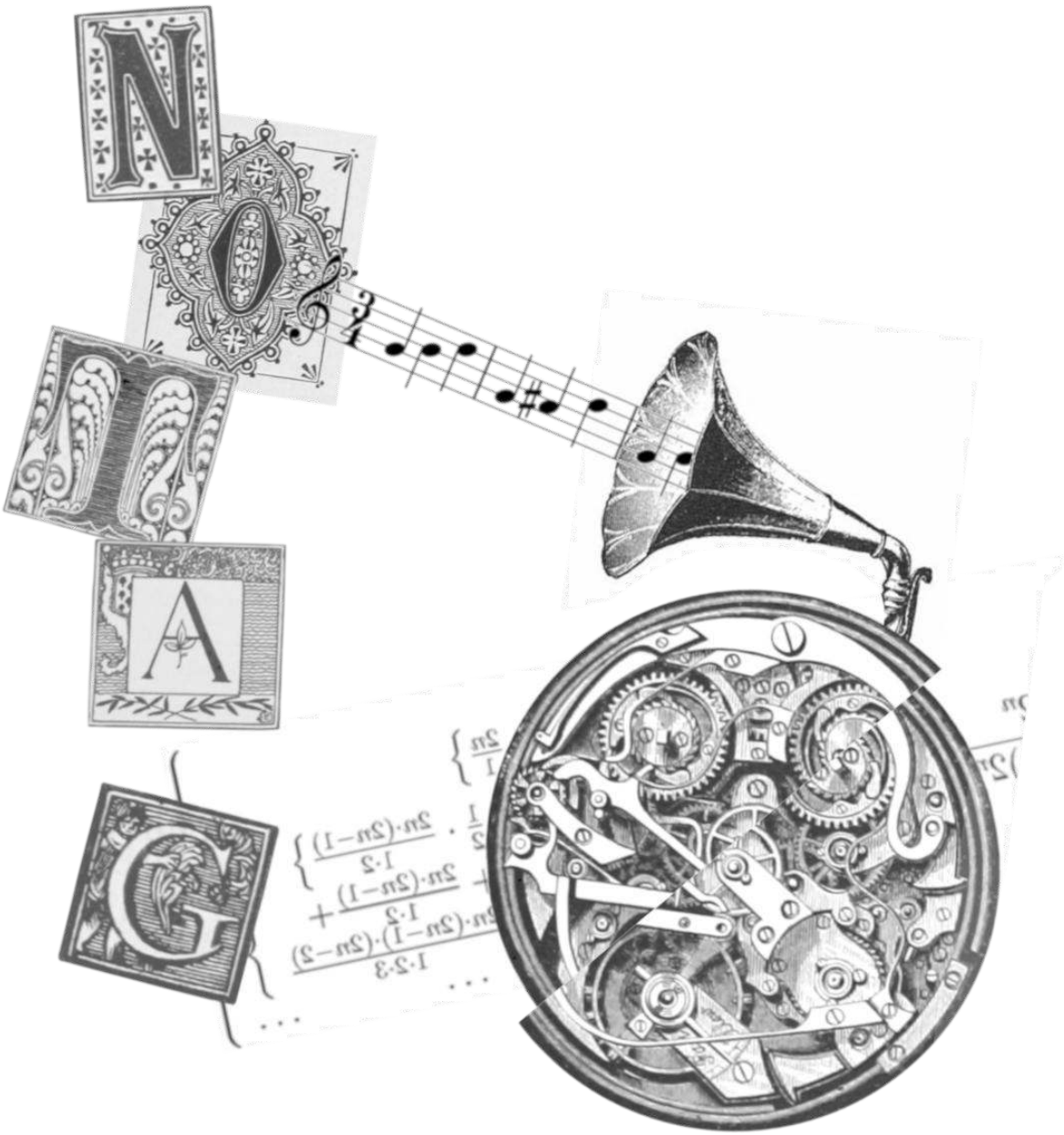
[10] https://twobithistory.org/2018/08/18/ada-lovelace-note-g.html

podemos apreciar su real aporte, como el búho de Minerva que emprende el vuelo en el ocaso, comprendemos mejor con la distancia histórica de los hechos consumados. Sin embargo, hoy podemos comprender también que el trabajo de Lovelace es el anuncio, en pleno contexto industrial decimonónico, de una nueva forma de conocer y producir que supera por mucho las propias condiciones sociales y económicos en donde fue pensado. La marginalidad, de género o de cualquier tipo, puede ser el lugar desde el cual aparece la creatividad que señale, ahora en la aurora, el incipiente vuelo de un nuevo mundo por construir.

Nota G

Bosquejo del motor analítico inventado por Charles Babbage

Augusta Ada Lovelace



Conviene evitar la posibilidad de que surjan ideas exageradas en cuanto a las capacidades del motor analítico. Al considerar cualquier asunto nuevo, suele aparecer una tendencia, en primer lugar, a sobrevalorar lo que nos parece ya interesante o notable y, en segundo lugar, por una especie de reacción natural, a infravalorar el verdadero estado del asunto, cuando descubrimos que nuestras nociones han superado lo que realmente podíamos sostener.

El motor analítico no tiene ninguna pretensión de producir nada nuevo. Puede hacer cualquier cosa que sepamos cómo ordenarle que haga. Puede seguir un análisis; pero no tiene la capacidad de anticipar ninguna relación o verdad analíticas. Su labor es ayudarnos a hacer accesible aquello con lo que ya estamos familiarizados. Está diseñada para hacer esto principalmente, por supuesto, por medio de sus facultades ejecutivas; pero es probable que ejerza también una influencia indirecta y recíproca sobre la propia ciencia de otra manera. Porque, al distribuir y combinar las verdades y fórmulas del análisis, de manera que las combinaciones mecánicas de la máquina las puedan manejar con mayor rapidez y facilidad, las relaciones y la naturaleza de muchos temas de la ciencia quedarán expuestas con una nueva luz y podrán investigarse más profundamente. Esto es una consecuencia indirecta y especulativa de tal invento. Sin embargo, es bastante evidente que, en general, al concebir una nueva forma de registrar verdades matemáticas y exponerlas para su uso, es probable que nos inspiren nuevas perspectivas que, de nuevo, deben reaccionar en el aspecto más teórico del asunto. Todas las extensiones del poder humano, o incrementos del

conocimiento humano, conllevan siempre varias influencias colaterales, además del objetivo principal obtenido.

Volviendo a las facultades ejecutivas de esta máquina, la pregunta que todas las mentes deben plantearse es: ¿son capaces realmente de seguir el análisis en toda su extensión? No se puede dar respuesta alguna a esta pregunta que satisfaga a todas las mentes, exceptuando la propia existencia del motor y la propia experiencia de sus resultados prácticos. Sin embargo, resumiremos los elementos principales con los que trabaja la máquina, para la consideración de cada lector:

1. Realiza las cuatro operaciones de la aritmética simple con cualquier número.

2. Por medio de ciertos artificios y arreglos (que no podemos abordar con el restringido espacio que admite la presente publicación), no existe límite ni para la magnitud de los números usados ni para el número de cantidades (ya sean variables o constantes) que se pueden emplear.

3. Puede combinar estos números y cantidades, tanto algebraica como aritméticamente, en relaciones ilimitadas en cuanto a variedad, extensión o complejidad.

4. Usa los signos algebraicos de acuerdo a sus leyes apropiadas y desarrolla las consecuencias lógicas de estas leyes.

5. Puede sustituir cualquier fórmula por otra, arbitrariamente; eliminando la primera de ellas de la columna en la que está representada y colocando la segunda en su lugar.

6. Puede entregar valores singulares. El señor Menabrea alude a esta capacidad en sus memorias, donde menciona el paso de valores de cero a infinito. La posibilidad de hacer que cambie sus procesos arbitrariamente en cualquier momento, ante la eventualidad de cualquier contingencia especificada (la sustitución de $(\frac{1}{2}\cos\overline{n+1}\theta + \frac{1}{2}\cos\overline{n-1}\theta)$ por $(\cos n\theta \cdot \cos\theta)$, explicada en la *Nota E*, ilustra esto de cierta forma), asegura este punto de inmediato.

El tema de la integración y la diferenciación exige atención. El motor puede efectuar estos procesos de dos maneras distintas:

Primero. Podemos ordenarle, por medio de la las tarjetas de Operación y de Variable, que siga los diversos pasos mediante los cuales se puede calcular el límite requerido para cualquier función que se esté considerando.

En segundo lugar. Puede efectuar la integración o diferenciación por sustitución directa

(si conocemos la forma del límite de la función en cuestión). En la Nota B, comentamos que cualquier conjunto de columnas en los que se inscriben números representa simplemente una función general de las diversas cantidades, hasta que la función especial quede impresa por medio de las tarjetas de Operación y Variable. Por ende, si en lugar de solicitar el valor de la función, solicitamos el de su integral o el de su coeficiente diferencial, solo tenemos que ordenarle la combinación particular de las cantidades ingredientes que constituya esa integral o ese coeficiente. En ax^n, por ejemplo, en lugar de las cantidades

$$\underbrace{\begin{matrix} V_0 & V_1 & V_2 \\ [a] & [n] & [x] \end{matrix}}_{ax^n} \begin{matrix} V_3 \\ [ax^n] \end{matrix}$$

para que aparezcan en V_3 en la combinación ax^n, se ordenarían para que aparecieran en la de anx^{n-1}

Entonces quedarían así:

$$\underbrace{\begin{matrix} V_0 & V_1 & V_2 \\ [a] & [n] & [x] \end{matrix}}_{anx^{n-1}} \begin{matrix} V_3 \\ \left[anx^{n-1}\right] \end{matrix}$$

Del mismo modo, podríamos tener $\frac{a}{n+1}x^{n+1}$, la integral de ax^n.

Un ejemplo interesante para seguir el proceso de la máquina sería la forma

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

o cualquier otro caso de integración por reducciones sucesivas, donde se puede hacer que una integral que contiene una operación repetida n veces dependa de otra que contiene las mismas n-1 o n-2 veces, y así hasta que, por reducción continua, alcancemos una forma final, cuyo valor hay que determinar luego.

Los métodos del *Calcul des Dérivations* de Arbogast son especialmente apropiados para la notación y los procesos del motor. Del mismo modo, todo el Análisis Combinatorio, que consiste, primero, en un cálculo de índices puramente numérico y, segundo, en la distribución y combinación de las cantidades según las leyes prescritas por estos índices.

Terminaremos estas Notas siguiendo en detalle los pasos a través de los cuales el motor podría calcular los Números de Bernoulli, siendo esto (en la forma que deduciremos aquí) un ejemplo bastante complejo de sus capacidades. La forma más sencilla de calcular estos

números sería mediante la expansión directa de

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^3}{2\cdot3\cdot4}+etc.} \qquad (1.)$$

que es de hecho un caso particular del desarrollo de

$$\frac{a+bx+cx^2+etc.}{a'+b'x+c'x^2+etc.}$$

mencionada en la Nota E. O, de nuevo, podríamos calcularlos a partir de la conocida forma

$$B_{2n-1} = 2\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\ldots2n}{(2\pi)^{2n}}\cdot\left\{1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots\right\} \qquad (\text{illegible})$$

o de la forma

$$B_{2n-1} = \frac{\pm2^n}{(2^{2n-1})2^{n-1}}\left\{\begin{array}{llll} & \frac{1}{2}n^{2n-1} & & \\ - & (n-1)^{2n-1}\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{1}\right\} & & \\ + & (n-2)^{2n-1}\left\{1+\frac{2n}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2n\cdot(2n-1)}{1\cdot2}\right\} & & \\ & -(n-3)^{2n-1}\left\{\begin{array}{ll} 1 & +\frac{2n}{1}+\frac{2n\cdot(2n-1)}{1\cdot2}+ \\ & +\frac{1}{2}\cdot\frac{2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)}{1\cdot2\cdot3}\end{array}\right\} & & \\ + & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\} \qquad (3.)$$

o de muchas otras. Sin embargo, como nuestro objetivo no es la simplicidad o facilidad de los cálculos, sino ilustrar el poder de la máquina, preferimos seleccionar la fórmula de abajo, marcada (8.). Es deriva de la siguiente manera:

Si en la ecuación

$$\frac{x}{e^x-1} = 1-\frac{x}{2}+B_1\frac{x^2}{2}+B_3\frac{x^4}{2\cdot3\cdot4}+B_5\frac{x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\ldots \qquad (4.)$$

(en la que B_1, B_3 ..., etc. son números de Bernoulli), expandimos el denominador del primer lado en potencias de x y luego dividimos el numerador y el denominador por x, derivaremos

$$1 = (1-\tfrac{x}{2}+B_1\tfrac{x^2}{2}+B_3\tfrac{x^4}{2\cdot3\cdot4}+\ldots)(1+\tfrac{x}{2}+\tfrac{x^2}{2\cdot3}+\tfrac{x^3}{2\cdot3\cdot4}+\ldots) \qquad (5.)$$

Si esta multiplicación del final pudiera hacerse, tendríamos una serie con la forma general

$$1+D_1x+D_2x^2+D_3x^3+\ldots \qquad (6.)$$

en la que vemos, primero, que todos los coeficientes de las potencias de x son iguales a cero; y, segundo, que la forma general para D_{2n}, el coeficiente del término 2n+1th (esto es x^{2n}, de cualquier potencia par de x) es lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{2\cdot 3\ldots 2n+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3\ldots 2n} + \frac{B_1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3\ldots 2n-1} + \frac{B_3}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1}{2\cdot 3\ldots 2n-3} + \\ + \frac{B_5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\frac{1}{2\cdot 3\ldots 2n-5} + \ldots + \frac{B_{2n-1}}{2\cdot 3\ldots 2n}\cdot 1 = 0 \end{array}\right\} \quad (7.)$$

Multiplicando todos los términos por (2·3…2n), obtenemos

$$\left.\begin{array}{r} 0 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-1}{2n+1} + B_1\left(\frac{2n}{2}\right) + B_3\left(\frac{2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)}{2\cdot 3\cdot 4}\right) \\ + B_5\left(\frac{2n\cdot(2n-1)\ldots(2n-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\right) + \cdots + B_{2n-1} \end{array}\right\} \quad (8.)$$

que conviene escribir en su forma general:

$$0 = A_0 + A_1B_1 + A_3B_3 + A_5B_5 + \cdots + B_{2n-1} \qquad (9.)$$

Siendo A_1, A_3…, etc. esas funciones de n que pertenecen respectivamente a B_1, B_2…, etc…

Podríamos haber derivado una forma similar a (8.) desde D_{2n-1}, el coeficiente de cualquier potencia impar de x en (6.); pero la forma general es algo diferente para los coeficientes de las potencias impares, y no tan conveniente.

Al examinar (7.) y (8.), podemos percibir que, cuando aislamos estas fórmu-las de (6.), a partir de la cual están derivadas, y las consideramos separada e independientemente, n puede ser cualquier número entero; aunque, cuando (7.) se da como una de las D en (6.), es obvio que entonces n no es arbitrario, sino que es siempre una función de la distancia de esa D desde el principio. Si esa distancia puede ser = d, entonces

$$2n+1 = d, \text{ y } n = \tfrac{d-1}{2} \text{ (para cualquier potencia par de x)}$$
$$2n = d, \text{ y } n = \tfrac{d}{2} \text{ (para cualquier potencia impar de x)}$$

Es con la fórmula independiente (8.) con la que tenemos que trabajar. Por ende, debemos recordar que las condiciones para el valor de n quedan ahora modificadas y que n es un número entero completamente arbitrario. Esta circunstancia, combinada con el hecho (fácilmente perceptible) de que, cualquiera sea el valor de n, cualquier término de (8.) tras el (n+1) es = 0, y que el propio término (n+1) es siempre $= B_{2n-1}\cdot\frac{1}{1} = B_{2n-1}$, nos permite hallar el valor (sea numérico o algebraico) de cualquier número de Bernoulli B_{2n-1} en

términos de todos los precedentes, solo con saber los valores de B_1, B_3... B_{2n-3} . Hemos anexado a esta nota un diagrama y una tabla con los detalles del cálculo de B_7 (B_1, B_3, B_5 vienen dados).

Al considerar con atención (8.), observaremos también que podemos derivar de ella el valor numérico de cualquier número de Bernoulli sucesivo, desde el principio, *ad infinitum*, mediante la siguiente serie de cálculos:

· Primera serie. —Siendo n=1, y calculemos (8.) para este valor de n. El resultado es B_1.

· Segunda serie. —Siendo n=2. Calculemos (8.) para este valor de n, sustituyendo el valor de B_1 que acabamos de obtener. El resultado es B_3.

· Tercera serie. —Siendo n=3. Calculemos (8.) para este valor de n, sustituyen-do los valores de B_1, B_3 obtenidos anteriormente. El resultado es B_5. Y así sucesivamente, hasta cualquier extensión.

El diagrama[1] representa las columnas de la máquina cuando está recién preparada para calcular B_{2n-1} (en el caso de n=4) ; mientras que la tabla de abajo ofrece una vista completa y simultánea de todos los cambios sucesivos que le ocurren a estas columnas para realizar el cálculo. (Refiero al lector a la Nota D para obtener una explicación respecto a la naturaleza y notación de dichas tablas).

Son necesarios seis datos numéricos, en este caso, para hacer las combinaciones requeridas. Estos datos son 1, 2, n(=4), B_1, B_3, B_5. Cuando n=5, haría falta el dato adicional B_7. Cuando n=6, haría falta el dato B_9; etcétera. Así, el número de datos necesarios siempre será n+2 para n=n; y de estos n+2 datos, $(\overline{n+2}-3)$ de ellos son números de Bernoulli sucesivos. La razón por la que se están colocando los números de Bernoulli usados como datos en las columnas de Resultado del diagrama es que podemos suponer que ya han sido calculados previamente en sucesión por la propia máquina; en esta circunstancia, cada B aparecerá como resultado antes de usarse como dato para calcular el siguiente B. Por tanto, aquí tenemos un ejemplo (del tipo mencionado en la *Nota D*) de la misma Variable realizando más de una función a la vez. Es cierto que, si consideramos que nuestro cálculo de B_7 es un cálculo completamente aislado, podemos concluir que B_1, B_3, B_5 se han colocado arbitrariamente en las columnas; y entonces sería más consistente ponerlos en V_4, V_5, V_6 como datos y no como resultados. Pero no vamos a considerarlo así. Al contrario, supondremos que la máquina estará en el proceso de calcular los números hasta un punto

[1] El diagrama se encuentra al final del zine

indeterminado desde el mismo principio; y que simplemente estamos seleccionando, mediante un ejemplo, un cálculo entre la serie sucesiva pero distinta de cálculos que está realizando. Cuando los B son fraccionarios, debe entenderse que se calculan y aparecen en la notación de fracciones decimales. De hecho, hay que ser conscientes de esta circunstancia para todos los cálculos. En cualquiera de los ejemplos ya expuestos en la traducción y en las Notas, algunos datos, y también algunos resultados temporales o permanentes, pueden ser fraccionarios con igual probabilidad que números enteros. Pero la configuración es tal modo que la naturaleza de los procesos sería igual que con los números enteros.

En la tabla y diagrama anterior no estamos considerando el signo de nin-guno de los B, solamente su magnitud numérica. La máquina arrojaría correctamente el signo para todos ellos correctamente, pero no podemos entrar en todo detalle adicional de este tipo como querríamos. Por lo tanto, los círculos para el signo que hay en el diagrama se dejan en intencionalmente en blanco.

Las tarjetas de Operación 1, 2, 3, 4, 5, 6 preparan $-\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$ .Así, la Tarjeta 1 multiplica dos por n, y las tres tarjetas Variable de Recepción, que pertenecen a V_4, V_5, V_6, respectivamente, permiten que el resultado 2n se coloque en cada una de estas últimas columnas (esto es un caso en el que hace falta una recepción triple de resultados para propósitos posteriores); vemos que los índices superiores de las dos Variables utilizadas durante la Operación 1 quedan inalterados.

No vamos a revisar los detalles de cada operación, ya que la tabla y el diagrama los especifican suficientemente; solo advertiremos algunos casos peculiares.

En la Operación 6, se convierte en una cantidad positiva en una cantidad negativa, simplemente restándole dicha cantidad a una columna que contiene un cero. (El signo encima de V_8 se convertiría en —durante este proceso).

Las Tarjetas 8, 9, 10 preparan $-\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \frac{2n}{2}$. En la Operación 9 vemos un ejemplo de un índice superior que de nuevo vuelve a tener un valor, después de haber pasado desde valores previos hasta cero. V_{11} ha sido, sucesivamente, ${}^0V_{11}$, ${}^1V_{11}$, ${}^2V_{11}$, ${}^0V_{11}$, ${}^3V_{11}$; y por la naturaleza de la función que tiene V_{11} en el cálculo, su índice seguirá pasando por más cambios adicionales; si los examinamos, se verá que son regulares y periódicos.

La Tarjeta 12 tiene que realizar la misma función que la que realizó la Tarjeta 7 hizo en la sección anterior; dado que si n hubiera sido =2, la operación onceava habría completado

el cálculo de B_3.

Las Tarjetas 13 a la 20 obtienen A_3. Como A_{2n-1} siempre consiste en factores, A_3 tiene tres factores; se puede ver que las Tarjetas 13, 14, 15, 16 obtienen el segundo de estos factores y luego lo multiplican por el primero; y que las 17, 18, 19, 20 obtienen el tercer factor y luego lo multiplican por el producto de los dos factores anteriores.

La Tarjeta 23 tiene la función de las Tarjetas 11 y 7, ya que, si n fuera =3, las operaciones veintiuno y veintidós vigésimo segunda completarían el cálculo de B_5. Como nuestro caso es B_7, el cálculo continuará con otra fase más; y ahora debemos prestar atención a que, para poder calcular A_7, solo es necesario repetir precisamente el grupo de Operaciones de la 13 a las 20; y luego, para completar el cálculo de B_7, repetir las Operaciones 21 y 22.

Se puede observar que cada unidad que se suma a n en B_{2n-1} conlleva una repetición adicional de las operaciones (13...23) para calcular B_{2n-1} . No solo son todas las operaciones precisamente las mismas para cada repetición, sino que necesitan recibir los números, respectivamente, de exactamente el mismo par de columnas; solo con la excepción de la Operación 21 que, por supuesto, necesitará B_5 (de V_{23}) en lugar de B3 (de V_{22}). Esta identidad de las columnas que proporcionan los números requeridos no debe confundirse con una identidad de los valores que contienen esas columnas y que son alimentados al molino. La mayoría de esos valores reciben alteraciones durante una ejecución de las operaciones (13...23) y, por tanto, las columnas presentan un nuevo conjunto de valores con los que tiene que trabajar la siguiente ejecución de las operaciones (13...23).

Al terminar la repetición de las operaciones (13...23) para calcular B_7, las alteraciones en los valores de las Variables son

V_6 = 2n-4 en vez de 2n-2.
V_7 = 6 . . . . . 4.
V_{10} = 0 . . . . . 1.
$V_{13} = A_0+A_1B_1+A_3B_3+A_5B_5$ en vez de $A_0+A_1B_1+A_3B_3$

En este estado, los únicos procesos restantes son, primero, transferir el valor que hay en V_{13} a V_{24} y, segundo, reducir V_6, V_7, V_{13} a cero y sumarle uno a V_3, para que la máquina esté lista para comenzar a calcular B_9. Las Operaciones 24 y 25 cumplen estos objetivos. Puede parecer anómalo que la Operación 25 se represente dejando el índice superior de V_3 todavía=unidad; pero debemos recordar que estos índices siempre empiezan de nuevo para

cada cálculo independiente, y que la Operación 25 coloca en V_3 el primer valor para el nuevo cálculo.

Debemos comentar que, cuando se repite el grupo (13…23), se producen cambios en algunos de los índice superiores durante el transcurso de la repetición. Por ejemplo, $^3V_6$ se transformaría en $^4V_6$ y $^5V_6$.

Así, vemos que cuando n = 1, se utilizan 9 tarjetas de operación; que cuando n = 2, se utilizan 14 de estas tarjetas; y que cuando n > 2, entonces 25 tarjetas de operación se utilizan, pero nunca se necesitan más, sin importar qué tan grande sea n; y no solo esto, sino que estas mismas 25 tarjetas bastan para la computación sucesiva de todos los números entre B_1 y B_{2n-1}, incluyendo a este último. Con respecto al número de Tarjetas de Variable, se recordará de explicaciones en anteriores notas, que un promedio de 3 tarjetas de estas por cada operación (y no por cada tarjeta de operación) es la estimación. De acuerdo a esto, la computación de B_1 requerirá 27 tarjetas de variable; B_3 requerirá 42 de estas tarjetas; B_5 requerirá 75; y por cada B sucesor a B_5 habrán 33 Tarjetas de Variable adicionales (Ya que cada repetición del grupo (13… 23) agrega 11 al número de operaciones requeridas para computar los B previos). Debemos explicar ahora, sin embargo, que cada vez que haya un *ciclo de operaciones*, y si estas requieren ser suministradas solo con números del mismo par de columnas, y además que cada operación ponga su resultado en la misma columna para cada repetición del grupo completo, entonces el proceso admite un ciclo de Tarjetas de Variable para efectuar su propósito. Hay, por supuesto, mucha más simetría y simplicidad en los arreglos cuando los casos admiten la repetición de Tarjetas de Variable y de Operación. Nuestro ejemplo presente es de esta naturaleza. La única excepción a una *identidad perfecta* en todos los procesos y columnas utilizados para cada repetición de operaciones (13… 23) es que la Operación 21 siempre requiere que uno de sus factores venga de una nueva columna. Pero mientras estas variaciones siguen la misma ley para cada repetición (La Operación 21 siempre requiriendo su factor de una columna una unidad más avanzada que la utilizada la vez anterior, y la operación 24 siempre poniendo su resultado en una columna una unidad más adelante que aquella que recibió en el resultado previo), son fácilmente provistas mediante el arreglo del grupo (o ciclo) recurrente de Tarjetas de Variable.

Aquí vale la pena remarcar que el estimado promedio de 3 Tarjetas de Variable por cada operación no debe ser tomado como absoluta y literalmente correcto para cada caso y circunstancia. Existen muchas circunstancias especiales, ya sea en la naturaleza del

problema o en los arreglos y configuración de la máquina bajo ciertas contingencias, que influyen y modifican este promedio en mayor o menor medida; pero es una regla bastante segura y correcta para guiarse en términos generales. En el caso anterior, nos dará 75 Tarjetas de Variable como número total necesario para computar cualquier B después de B_3. Este es un número muy cercano a la cantidad exacta utilizada, pero no podemos entrar aquí en las minucias de las pocas circunstancias particulares que ocurren en este ejemplo (Como ocurren normalmente en una u otra etapa de la mayoría de las computaciones) para modificar levemente este número.

Se hará obvio que este mismo número de Tarjetas de Variable (75) se repetirá para el cálculo de cada número subsiguiente, en base al mismo principio que permite que se usen siempre 33 Tarjetas de Variable de las Operaciones (13... 23) en el cálculo de cualquier número. Entonces, debe existir un ciclo de un ciclo de Tarjetas de Variable.

Si ahora aplicamos la notación previa a los ciclos, como se explicó en la Nota E., entonces podemos expresar las operaciones para los cálculos de los Números de Bernoulli de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ll}
(1\ldots7),(24,25)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots entrega \quad B_1 & = primer\ número; (siendo\ n=1). \\
(1\ldots7),(8\ldots12),(24,25)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B_3 & = segundo\ldots\ldots; (n\ldots=2). \\
(1\ldots7),(8\ldots12),(13\ldots23),(24,25)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B_5 & = tercero\ldots\ldots; (n\ldots=3). \\
(1\ldots7),(8\ldots12),2\,(13\ldots23),(24,25)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B_7 & = cuarto\ldots\ldots; (n\ldots=4). \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(1\ldots7),(8\ldots12),\sum(+1)^{n-2}(13\ldots23),(24,25)\ldots B_{2n-1} & = enésimo\ldots\ldots; (n\ldots=n).
\end{array}
$$

Y nuevamente,

$$
\begin{matrix} (1\ldots7),(24,25), \sum\limits_{límites\quad 1\ a\ n}(+1)^n \end{matrix}
\left\{ \begin{matrix} (1\ldots7),(8\ldots12), \sum\limits_{límites\quad 0\ a\ (n+2)}(n+2)\,(13\ldots23),(24,25) \end{matrix} \right\}
$$

representa las operaciones totales para computar todos los números de la sucesión, de B_1 a B_{2n-1} incluido.

En esta fórmula podemos ver un ciclo variable de primer orden, y un ciclo ordinario de segundo orden. El segundo ciclo, en este caso, incluye en él al ciclo variable.

Al inspeccionar las diez Variables de Trabajo del diagrama, puede verse que a pesar de que el valor de cualquiera de ellos (exceptuando a V_4 y V_5) pasa por una serie de cambios, aunque la función que cada uno lleva a cabo en el cálculo es fijo e invariable. Así, V_6 prepara los numeradores de los factores de cualquier A; V_7 los denominadores. V_8 siempre

recibe el factor en el lugar (2n-3) de A_{2n-1} , y V_9 el factor en el lugar (2n-1). V_{10} siempre decide cuál de los dos caminos seguirán los procesos siguientes, a través de una sustracción del valor de n; y así con los siguientes; pero no enumeraremos más adelante. Es deseable en todos los cálculos que las funciones llevadas a cabo por las Variables sean lo más fijas y uniformes posibles, para la configuración de los procesos.

Suponiendo que fuera deseado, no solamente tabular B_1, B_3, ..., sino también A_0, A_1, ...; entonces solo tenemos que nombrar otra serie de variables V_{41}, V_{42}, ..., para recibir aquellos resultados posteriores que sean sucesivamente producidos sobre V_{11}. O podríamos, en vez de esto o además de esta segunda serie de resultados, querer tabular los valores de cada término total (8.) de las series, es decir, A_0, A_1B_1, A_3B_3, ... Luego solo tenemos que multiplicar cada B con su A correspondiente, y ubicar estos productos sucesivos en Columnas Resultantes nombradas para tal fin.

La fórmula (8.) es interesante desde otro punto de vista. Es este caso particular de la integral general de la siguiente ecuación diferencial mixta:

$$\frac{d^2}{dx^2}(z_{n+1}x^{2n+2}) = (2n+1)(2n+2)z^n x^{2n}$$

para ciertas suposiciones especiales respecto a z, x y n.

La integral general tiene la forma,

$$z_n = f(n)\cdot x + f_1(n) + f_2(n)\cdot x^{-1} + f_3(n)\cdot x^{-3} + \ldots$$

y es digno de destacar que la máquina podría (de una forma más o menos similar a la anterior) calcular el valor de esta fórmula además de la mayoría de las otras hipótesis sobre las funciones en la integral con tanta (o quizás mayor) facilidad que con la fórmula (8.).

A.A.L

Number of Operation.	Nature of Operation.	Variables acted upon.	Variables receiving results.	Indication of change in the value on any Variable.	Statement of Results.	Data. ${}^1V_1$ ○ 0 0 1 [1]	Data. ${}^1V_2$ ○ 0 0 2 [2]	Data. ${}^1V_3$ ○ 0 0 4 [n]	${}^0V_4$ ○ 0 0 0 [ ]	${}^0V_5$ ○ 0 0 0 [ ]	${}^0V_6$ ○ 0 0 0 [ ]
1	×	${}^1V_2 \times {}^1V_3$	${}^1V_4, {}^1V_5, {}^1V_6$	${}^1V_2 = {}^1V_2$, ${}^1V_3 = {}^1V_3$	$= 2n$	...	2	n	$2n$	$2n$	$2n$
2	−	${}^1V_4 - {}^1V_1$	${}^2V_4$	${}^1V_4 = {}^2V_4$, ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= 2n-1$	1	...	...	$2n-1$		
3	+	${}^1V_5 + {}^1V_1$	${}^2V_5$	${}^1V_5 = {}^2V_5$, ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= 2n+1$	1	...	...	...	$2n+1$	
4	÷	${}^2V_5 \div {}^2V_4$	${}^1V_{11}$	${}^2V_5 = {}^0V_5$, ${}^2V_4 = {}^0V_4$	$= \frac{2n-1}{2n+1}$	...	...	...	0	0	...
5	÷	${}^1V_{11} \div {}^1V_2$	${}^2V_{11}$	${}^1V_{11} = {}^2V_{11}$, ${}^1V_2 = {}^1V_2$	$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$	...	2	...	...	...	...
6	−	${}^0V_{13} - {}^2V_{11}$	${}^1V_{13}$	${}^2V_{11} = {}^0V_{11}$, ${}^0V_{13} = {}^1V_{13}$	$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = A_0$	...	...	...	...	...	...
7	−	${}^1V_3 - {}^1V_1$	${}^1V_{10}$	${}^1V_3 = {}^1V_3$, ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= n-1\,(=3)$	1	...	n	...	...	...
8	+	${}^1V_2 + {}^0V_7$	${}^1V_7$	${}^1V_2 = {}^1V_2$, ${}^0V_7 = {}^1V_7$	$= 2 + 0 = 2$	...	2	...	...	...	...
9	÷	${}^1V_6 \div {}^1V_7$	${}^3V_{11}$	${}^1V_6 = {}^1V_6$, ${}^0V_{11} = {}^3V_{11}$	$= \frac{2n}{2} = A_1$	...	...	...	...	...	$2n$
10	×	${}^1V_{21} \times {}^3V_{11}$	${}^1V_{12}$	${}^1V_{21} = {}^1V_{21}$, ${}^3V_{11} = {}^3V_{11}$	$= B_1 \cdot \frac{2n}{2} = B_1 A_1$	...	...	...	...	...	...
11	+	${}^1V_{12} + {}^1V_{13}$	${}^2V_{13}$	${}^1V_{12} = {}^0V_{12}$, ${}^1V_{13} = {}^2V_{13}$	$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} + B_1 \cdot \frac{2n}{2}$ ...	...	...	...	...	...	...
12	−	${}^1V_{10} - {}^1V_1$	${}^2V_{10}$	${}^1V_{10} = {}^2V_{10}$, ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= n-2\,(=2)$	1	...	...	...	...	...
13	−	${}^1V_6 - {}^1V_1$	${}^2V_6$	${}^1V_6 = {}^2V_6$, ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= 2n-1$	1	...	...	...	...	$2n-1$
14	+	${}^1V_1 + {}^1V_7$	${}^2V_7$	${}^1V_1 = {}^1V_1$, ${}^1V_7 = {}^2V_7$	$= 2 + 1 = 3$	1	...	...	...	...	...
15	÷	${}^2V_6 \div {}^2V_7$	${}^1V_8$	${}^2V_6 = {}^2V_6$, ${}^2V_7 = {}^2V_7$	$= \frac{2n-1}{3}$	...	...	...	...	...	$2n-1$
16	×	${}^1V_8 \times {}^3V_{11}$	${}^4V_{11}$	${}^1V_8 = {}^0V_8$, ${}^3V_{11} = {}^4V_{11}$	$= \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3}$	...	...	...	...	...	...
17	−	${}^2V_6 - {}^1V_1$	${}^3V_6$	${}^2V_6 = {}^3V_6$, ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= 2n-2$	1	...	...	...	...	$2n-2$
18	+	${}^1V_1 + {}^2V_7$	${}^3V_7$	${}^2V_7 = {}^3V_7$, ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= 3 + 1 = 4$	1	...	...	...	...	...
19	÷	${}^3V_6 \div {}^3V_7$	${}^1V_9$	${}^3V_6 = {}^3V_6$, ${}^3V_7 = {}^3V_7$	$= \frac{2n-2}{4}$	...	...	...	...	...	$2n-2$
20	×	${}^1V_9 \times {}^4V_{11}$	${}^5V_{11}$	${}^1V_9 = {}^0V_9$, ${}^4V_{11} = {}^5V_{11}$	$= \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \cdot \frac{2n-2}{4} = A_3$	...	...	...	...	...	...
21	×	${}^1V_{22} \times {}^5V_{11}$	${}^0V_{12}$	${}^1V_{22} = {}^1V_{22}$, ${}^0V_{12} = {}^2V_{12}$	$= B_3 \cdot \frac{2n}{2} \cdot \frac{2n-1}{3} \cdot \frac{2n-2}{3} = B_3 A_3$	...	...	...	...	...	...
22	+	${}^2V_{12} + {}^2V_{13}$	${}^3V_{13}$	${}^2V_{12} = {}^0V_{12}$, ${}^2V_{13} = {}^3V_{13}$	$= A_0 + B_1 A_1 + B_3 A_3$	...	...	...	...	...	...
23	−	${}^2V_{10} - {}^1V_1$	${}^3V_{10}$	${}^2V_{10} = {}^3V_{10}$, ${}^1V_1 = {}^1V_1$	$= n-3\,(=1)$	1	...	...	...	...	...

Here follows a repetition

24	+	${}^4V_{13} + {}^0V_{24}$	${}^1V_{24}$	${}^4V_{13} = {}^0V_{13}$, ${}^0V_{24} = {}^1V_{24}$	$= B_7$	...	...	...	...	...	...
25	+	${}^1V_1 + {}^1V_3$	${}^1V_3$	${}^1V_1 = {}^1V_1$, ${}^1V_3 = {}^1V_3$, ${}^5V_6 = {}^0V_6$, ${}^5V_7 = {}^0V_7$	$= n+1 = 4+1 = 5$ ..... by a Variable-card. by a Variable card.	1	...	$n+1$	...	...	0

Working Variables.							Result Variables.			
$^0V_7$ ○ 0 0 0 □	$^0V_8$ ○ 0 0 0 □	$^0V_9$ ○ 0 0 0 □	$^0V_{10}$ ○ 0 0 0 □	$^0V_{11}$ ○ 0 0 0 □	$^0V_{12}$ ○ 0 0 0 □	$^0V_{13}$ ..... ○ 0 0 0 □	$^1V_{21}$ ○ B_1 in a decimal fraction. B_1	$^1V_{22}$ ○ B_3 in a decimal fraction. B_3	$^1V_{23}$ ○ B_5 in a decimal fraction. B_5	$^0V_{24}$... ○ 0 0 0 B_7
...	...	...	...	$\frac{2n-1}{2n+1}$						
...	...	...	...	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}$						
...	...	...	...	0	.....	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}=A_0$				
...	...	...	$n-1$							
2										
2	...	...	...	$\frac{2n}{2}=A_1$						
...	...	...	...	$\frac{2n}{2}=A_1$	$B_1\cdot\frac{2n}{2}=B_1A_1$	.....	B_1			
...	...	...	...	.....	0	$\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}+B_1\cdot\frac{2n}{2}\right\}$				
...	...	...	$n-2$							
3										
3	$\frac{2n-1}{3}$									
...	0	...	...	$\frac{2n}{2}\cdot\frac{2n-1}{3}$						
4										
4	...	$\frac{2n-2}{4}$	...	$\left\{\frac{2n}{2}\cdot\frac{2n-1}{3}\cdot\frac{2n-2}{3}\right\}$ $=A_3$						
...	...	0								
...	...	...	...	0	B_2A_2	.....	.....	B_3		
...	...	...	...	.....	0	$\left\{A_3+B_1A_1+B_2A_2\right\}$				
...	...	...	$n-3$							

of Operations thirteen to twenty-three.

...	...	...	...	.....	.....	.....	.....	.....	.....	B_7
0										

Índice

La Máquina en el Umbral 4

El Código y el Amanecer 13

Nota G 26

Licencia Producción de Pares

Eres libre de copiar y distribuir este material con las siguientes condiciones:

* Atribución: dar reconocimiento a la autoría y la edición de la obra.

* Compartir bajo misma licencia: si se crea una obra derivada de esta, debe tener esta misma licencia.

* No Capitalista: este obra solo puede ser comercializada por organizaciones de trabajadores autogestionados, cooperativas, organizaciones y colectivos sin fines de lucro en donde no existan relaciones de explotación laboral.

Licencia completa
https://endefensadelsl.org/ppl_es.html

Descarga este fanzine en:

- https://colectivodisonancia.net/zines
- https://cloud.disroot.org/s/ezoecDQFdBdwCzy
- https://gitlab.com/cdisonancia/zines

O accediendo al enlace en este QR

"... logró entrever elementos potenciales de la máquina analítica que nadie había sospechado. Este acercamiento desde el margen social hacia el centro de la innovación intelectual es también una inusitada oportunidad. El margen permite una cierta distancia para pensar ideas que no son siquiera imaginables en el centro intelectual. O en otras palabras, la creatividad que surge desde el margen no tiene los mismos límites que se establecen en las ideas convencionales.

Ada expresa el contrapunto creativo y marginal respecto del desarrollo estandarizado y monótono del capitalismo industrial y que abre la posibilidad de construir, materialmente, una forma de subversión; una inquieta apertura de posibilidades a la sombra de la devastación industrial."

La copia comparte cultura.

colectivo disonancia